Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 14 декабря 2025 года
9 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.
Дан неравнобедренный треугольник ABC без тупых углов, с центром вписанной окружности I и точкой M, делящей отрезок BC пополам.

1.1. Докажите, что прямая IM не может быть параллельна никакой стороне треугольника ABC.

1.2. Пусть прямая IM пересекает прямые AB и AC в точках C_1 и B_1, соответственно. Обозначим через I_b центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся отрезка AC. Докажите, что $I_bB_1 \parallel BC$.

Сюжет 2.
Пусть S — n-элементное множество вещественных чисел, отличных от $0, \pm 1$. Известно, что если для некоторых двух вещественных чисел x, y выполнено

$$xy + 1 = x - y,$$

и одно из них лежит в S, то и второе лежит в S.

2.1. Найдите все возможные значения n.

2.2. Вася утверждает, что он может написать в явном виде непостоянную функцию $f(x)$, являющуюся отношением многочленов, которая принимает на любом множестве S размера ровно 772 не более трех сотен значений. Прав ли он?

Сюжет 3.
Вася наткнулся на табличку с n строками и m столбцами, в каждой клетке которой записано натуральное число от 1 до k, причем числа в строках и столбцах не повторяются. Путем длительного рассматривания он установил, что

- для любых двух строк найдется ровно a различных чисел, встречающихся в каждой из них;
- для любых двух столбцов найдется ровно b различных чисел, встречающихся в каждом из них;
- для любой строки и любого столбца найдется ровно c различных чисел, встречающихся в обоих.

3.1. Пусть все числа в табличке встречаются одинаковое количество раз. Выразите a, b и c через n, m, k.

3.2. Постройте подходящую табличку для $n = 3$, $m = k = 7$, $a = 7$, $b = 1$, $c = 3$.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 14 декабря 2025 года
9 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.
Дан неравнобедренный треугольник ABC без тупых углов, с центром вписанной окружности I и точкой M, делящей отрезок BC пополам.

1.3. Пусть $\angle A = 90^\circ$. Точка P выбрана так, что $MP = MI$ и $IP \parallel BC$. Докажите, что $IP \leqslant B_1C_1$.

1.4. Обозначим через N середину дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности треугольника NB_1C_1 лежит на прямой AI.

Сюжет 2.
Теперь S — n-элементное множество вещественных чисел, $a \in \mathbb{R}$. Известно, что если для некоторых двух вещественных чисел x, y выполнено

$$xy + 1 = a(x - y)$$

и одно из них лежит в S, то и второе лежит в S.

2.3. Для каких a найдется множество S размера 997?

2.4. Целое число a и простое число $p > 3$ таковы, что число $(a^3 - 3a)^2 - 3(1 - 3a^2)^2$ делится на p. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 9.

Сюжет 3.
Вася наткнулся на табличку с n строками и m столбцами, в каждой клетке которой записано натуральное число от 1 до k, причем числа в строках и столбцах не повторяются. Путем длительного рассматривания он установил, что

- для любых двух строк найдется ровно a различных чисел, встречающихся в каждой из них;
- для любых двух столбцов найдется ровно b различных чисел, встречающихся в каждом из них;
- для любой строки и любого столбца найдется ровно c различных чисел, встречающихся в обоих.

3.3. Также Вася заметил, что

$$a = \frac{m(mn - k)}{(n - 1)k}.$$

Докажите, что все числа в табличке встречаются поровну раз.

3.4. Постройте пример подходящей таблички для $n = 7$, $m = 8$ и $k = 14$.