Олимпиада
Юношеской математической школы
Второй отборочный тур
4 октября 2025 года
11 класс

1. Докажите, что существует натуральное число, кратное тысяче, в двоичной записи которого ровно тысяча нулей и тысяча единиц.

2. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Сколько различных вещественных корней имеет уравнение $f(f(...f(x)...)) = x$, где функция применена 100 раз?

3. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в верхнем полупространстве, его вершина A находится в начале координат. Расстояния от вершин B, D и A_1 до плоскости $z = 0$ равны 1, 2 и 5. Чему равно расстояние от вершины C_1 до этой плоскости?

(Обозначения вершин стандартные: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — квадраты с вершинами именно в таком порядке, A соединена ребром с A_1, B — с B_1, C — с C_1, D — с D_1.)

4. В стране 1000 городов. Между некоторыми парами городов действуют авиалинии (для каждой пары городов не более одной), всего между городами проложено 200000 авиалиний. В одном из городов находится невидимый вор, которого ищет воздушная полиция. За один ход вор перемещается из города в другой, используя одну авиалинию. Полиция за свой ход должна закрыть одну авиалинию и взамен открыть другую авиалинию (возможно, закрытую ранее, возможно, ранее не существовавшую). Ходят по очереди, начиная с вора. Если вор не может сделать ход (то есть окажется в городе, из которого невозможно никуда вылететь), то он становится видимым, и воздушная полиция его ловит. Докажите, что воздушная полиция сможет поймать вора.

5. Дан отрезок AB. Точки X и Y выбираются на отрезке AB так, что X лежит между A и Y. Оказалось, что $AX^2 + BY^2 = XY^2$. Докажите, что существует точка, из которой все такие отрезки XY видны под фиксированным углом.