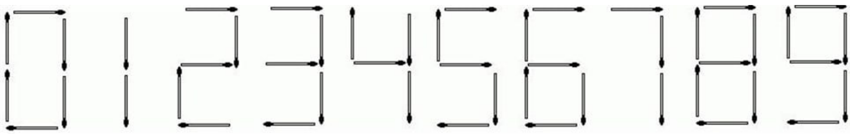
Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
4 класс

1. Из 21 спички сложено число 888. Как переместить две спички, чтобы в результате получить число, делящееся на 9? Цифры складываются из спичек, как показано на рисунке.



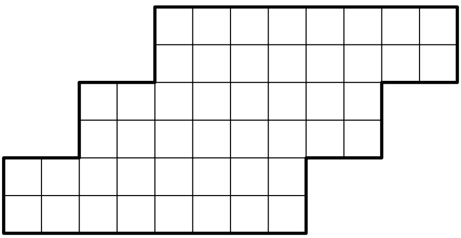
2. Котики Черри и Декстер любят придумывать новые математические операции. Однажды они придумали бублик и крестик.

A θ B = 10A+B,

A χ B = A+B+ A θ B.

Черри вычислила, сколько будет 1 θ (2 χ 3), а Декстер — (1 θ 2) χ 3. Чьё число получилось больше и на сколько?

3. Разрежьте данную фигуру по границам клеток на 6 одинаковых восьмиугольников. Восьмиугольники, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.



4. 4 друга-двоечника тапали хомяка, каждый на своем смартфоне. Каждый из них либо хвастун (преувеличивает количество всех тапов — и своих, и чужих — в 3 раза) либо скромник (про себя преуменьшает в 2 раза, про остальных говорит правду). У каждого спросили, сколько они натапали. Пол ответил: мы вместе с Чарли тапнули 22000 раз. Вилли сказал: мы вместе с Тедом тапнули 24000 раза. Тед сказал: а у меня с Чарли вместе 87000 тапов! Чарли сказал: на двоих с Вилли у нас 15000 тапов. Сколько же раз тапнули они все вместе, если известно, что каждый тапнул хотя бы 1 раз.

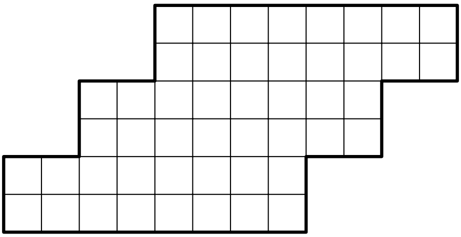
5. В таблице 3×5 расставлены числа, как показано на рисунке. За одну операцию можно поменять местами любые два числа из клеток, соседних по стороне. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце делилась на 4?

5	27	22	89	14
5	50	4	6	34
13	10	21	18	26

Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
5 класс

1. Разрежьте данную фигуру по границам клеток на 6 одинаковых восьмиугольников. Восьмиугольники, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.



2. Есть шесть яблок с массами 47, 97, 98, 99, 100 и 103 грамма. Петя и Вася берут по яблоку (сперва Петя) и одновременно начинают есть их. Скорость поедания одинакова: Петя и Вася за одну минуту съедают одинаковое количество граммов яблок. Кто доел своё яблоко, тот берёт одно из оставшихся, если таковые имеются. Может ли Петя съесть больше граммов яблок, чем Вася, если оба будут есть по правилам и Вася не будет поддаваться?

3. Найдите наибольшее четырёхзначное число, представимое в виде суммы четырёх натуральных слагаемых так, что для записи всех слагаемых используется только одна цифра.

4. В каждой клетке доски 5×5 нарисована стрелочка «вверх», «вниз», «вправо» или «влево». ИИ Вася не видит картинки, но утверждает, что может поменять стрелочки не более чем в 10 клетках так, что после этого можно будет обойти всю доску, начав с какой то клетки и следуя по стрелочкам (посетив каждую клетку по разу). Прав ли ИИ Вася?

5. В чемпионате по рассказыванию шуток участвовали 15 людей и 15 искинов (искусственных интеллектов), стоявших по кругу в случайном порядке. Каждый из них произнес ровно одну шутку и посмеялся над шутками кого-то из остальных. Известно, что люди смеялись всегда, когда шутку произносил их сосед-человек (и только в этом случае), а искины смеялись над всеми шутками соседей-людей, а также над всеми шутками несоседей. Сколько всего раз смеялись участники чемпионата?

Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
6 класс

1. На острове живет 66 человек, каждый человек принадлежит одному из трех племен: рыцарей, лжецов или масонов. Рыцари всем говорят правду, лжецы всем лгут, а масоны говорят правду только масонам, а всем остальным лгут. Все люди сели за круглый стол и каждый сказал своему левому соседу: «Мой правый сосед не из твоего племени», а правому соседу — «Мой левый сосед не из твоего племени». Могло ли в кругу быть 36 масонов?

2. Расставьте в пустых клетках числа от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце все числа были различными, и числа в соседних (по стороне) клетках отличались более чем на 1.

1				
	2			
		3		
			4	
				5

3. У Маши на полке есть вёдра емкостью 7, 8, 11, 12, 13 литров. Одно из них прохудилось и не держит воду, но какое именно, Маша не знает. Маша хочет взять не более трех вёдер, пойти на речку, набрать там ровно 15 литров воды. Сможет ли она это сделать?

4. По кругу стоят 2025 натуральных чисел от 2 до 9. Известно, что сумма всех этих чисел нечетна, а для любых трех подряд стоящих чисел выполняется правило: «число, составленные из первых двух цифр, делится на третью». Например, в этом кругу не может встретиться последовательность 4, 2, 4, — потому что 42 не делится на 4. А вот последовательность 2, 4, 4 может, так как 24 делится на 4. Обязательно ли все числа в этом кругу одинаковые?

5. Маша и Витя играют в конструктор. У Маши есть только блоки 1×2, 1×3 и 1×5 (очень много блоков каждого вида), а у Вити только 1×4, 1×5 и 1×7 (тоже очень много блоков каждого вида). Родители дали ребятам задание: каждый должен сложить из своих блоков полоску 1×16, при этом Маша должна использовать на 4 блока больше, чем Витя. Сколькими способами ребята могут выполнить задание? Комментарий: блоки одинакового размера при подсчете вариантов считаются одинаковыми

Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
7 класс

1. В каждой клетке доски 5 на 5 нарисована стрелочка «вверх», «вниз», «вправо» или «влево». ИИ Вася не видит картинки, но гарантирует, что может поменять стрелочки менее, чем в половине клеточек так, что после этого можно будет обойти доску, начав с какой то клетки и следуя по стрелочкам (посетив каждую клетку по разу). Прав ли ИИ Вася?

2. По кругу стоят 2025 натуральных чисел от 2 до 9. Известно, что сумма всех этих чисел нечетна, а для любых трех подряд стоящих чисел выполняется правило: «число, составленные из первых двух цифр, делится на третью». Например, в этом кругу не может встретиться последовательность 4, 2, 4, — потому что 42 не делится на 4. А вот последовательность 2, 4, 4 может, так как 24 делится на 4. Обязательно ли все числа в этом кругу одинаковые?

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не равны, и каждая из них меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что один из числителей можно увеличить на 1 так, чтобы сумма получившихся дробей была меньше 1.

4. У рыцаря есть сундуки с бриллиантами. Каждую ночь рыцарь берет один из сундуков, в котором больше двух бриллиантов, и раскладывает бриллианты из него в два пустых сундука примерно поровну: количества бриллиантов в двух новых сундуках должны отличаться, но не более чем на 2. Сколько ночей будет продолжаться эта забава, если изначально у него был один сундук с $(2025)^{2025}$ бриллиантами? (Пустых сундуков очень много, заведомо хватит для потребностей рыцаря.)

5. Есть восемь монет, по две монеты каждого из четырех видов. Загадочный полупроводниковый прибор умеет проверять, одинакового ли вида две выбранные монеты или нет. За какое наименьшее число использований прибора можно гарантированно добиться от него положительного ответа?

Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
8 класс

1. Мальчик бежал с постоянной скоростью вверх по эскалатору, который так же с постоянной скоростью двигался вверх. Через 2 минуты эскалатор выключили, после чего мальчик добежал до конца эскалатора. Оказалось, что мальчик потратил на свой путь на 2 минуты меньше, чем если бы бежал по выключенному эскалатору. Докажите, что скорости мальчика и эскалатора равны.

2. Дан пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB = BC = CD = DE = EA = 10$, причём $\angle BDC + \angle ADE = \angle ADB$. Докажите, что существует точка F такая, что $AF = BF = DF = 10$.

3. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не равны, и каждая из них меньше $\frac{1}{2}$. Докажите, что один из числителей можно увеличить на 1 так, чтобы сумма получившихся дробей была меньше 1.

4. Сколько существует способов разбить числа 1, 2, ..., 540 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была не меньше 533?

5. Дано натуральное число n. Серёжа нашёл минимальные натуральные числа x и y такие, что $1 + 2 + \ldots + x$ делится на n, а $1 + 2 + \ldots + y$ делится на $n + 1$. Могло ли так оказаться, что $y - x \geqslant 14092025$?

Олимпиада
Юношеской математической школы

Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
9 класс

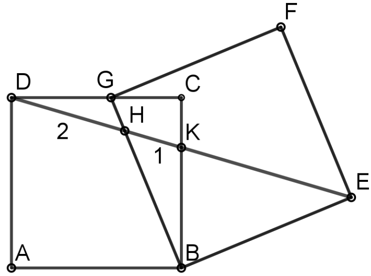
1. Есть ведро, в котором много шариков, и есть 288 стаканов, поставленных в ряд: первый стакан находится на расстоянии 1 м от ведра, а каждый следующий — на расстоянии 1 м от предыдущего (все стаканы и ведро — на одной прямой). Андрей берёт шарик из ведра, идёт у первому стакану, кладёт шарик в стакан, возвращается к ведру, снова берёт шарик, идёт ко второму стакану, кладёт туда шарик, возвращается к ведру, и т.д. Яков берёт из ведра шарик, идёт к последнему стакану, кладёт туда шарик, идёт к ведру, берёт оттуда шарик, идёт к предпоследнему стакану, и т.д. Начинают мальчики одновременно, их скорости постоянны и равны. Могло ли оказаться, что они опустили шарики в какой-то стакан одновременно?

2. Среди двадцати бандерлогов каждый относится либо к племени рыцарей, всегда говорящих только правду, либо к племени лжецов, которые всегда лгут. Каждый из них сказал некоторым другим бандерлогам фразу, так что в каждой паре A и B была сказана ровно одна фраза (т.е. либо A сказал B одну фразу, либо наоборот). Прозвучало 100 фраз «Мы с тобой одной крови, ты и я» и 90 фраз «Мы с тобой не одной крови, ты и я». Какое наименьшее и какое наибольшее количество бандерлогов-рыцарей могло быть? (Фраза «одной крови» означает «из одного племени».)

3. Андрей задумал квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 - px + q$, имеющий два корня. Если один корень увеличить на 2, а второй умножить на 2, то получатся корни трёхчлена $g(x) = x^2 - qx + p$. Найдите $f(\frac{5}{6})$.

4. Положительные дроби $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$ попарно различны, и каждая из них меньше $1/3$. Костя хочет прибавить к k числителям по 1 так, чтобы сумма полученных дробей всё ещё была меньше 1. При каком максимальном k Костя заведомо сможет это сделать?

5. Два квадрата пересекаются так, как показано на рисунке. Известно, что $DH = 2$, $HK = 1$. Найдите угол CGF.



Олимпиада
Юношеской математической школы

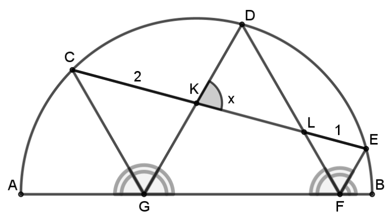
Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
10 класс

1. Вова нарисовал прямоугольник и прямоугольный треугольник. Могло ли оказаться, что у них одинаковые периметры и одинаковые площади?

2. Среди двадцати бандерлогов каждый относится либо к племени рыцарей, всегда говорящих только правду, либо к племени лжецов, которые всегда лгут. Каждый из них сказал некоторым другим бандерлогам фразу, так что в каждой паре A и B была сказана ровно одна фраза (т.е. либо A сказал B одну фразу, либо наоборот). Прозвучало 100 фраз «Мы с тобой одной крови, ты и я» и 90 фраз «Мы с тобой не одной крови, ты и я». Какое наименьшее и какое наибольшее количество бандерлогов-рыцарей могло быть? (Фраза «одной крови» означает «из одного племени».)

3. Пусть $n > 4$ — основание системы счисления, и пусть k, l, m — последние (т.е. наибольшие) цифры в этой системе счисления. Докажите, что $\overline{123\ldots km}\cdot l = \overline{mlk\ldots 432}$. Например, в десятичной системе счисления это равенство выглядит как $12345679 \cdot 8 = 98765432$.

4. На рисунке изображена полуокружность с диаметром AB. Шесть углов с вершинами G и F равны. Известно, что $CK = 2$, а $LE = 1$. Найдите величину угла DKL.



5. Петя называет натуральное число k. Вася слышит, что говорит Петя, и называет число n. После этого ищутся минимальные числа x и y, такие что $1^k+2^k+\ldots+x^k$ делится на n и $1^k+2^k+\ldots+y^k$ делится на $n+1$. Петя выигрывает, если $y-x < 14092025$, иначе выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
14 сентября 2025 года
11 класс

1. Блогерша Оля очень любит подводить статистику, но не любит думать, откуда берутся те или иные числа. Как-то она подводила статистику по одной олимпиаде. В своём блоге она опубликовала следующее: победителей олимпиады — 2,56%, призёров — 25%, участников (т.е. пришедших на олимпиаду, но не ставших победителями или призёрами) — 71,875%, а ещё 18,08% зарегистрировалось, но не явилось на олимпиаду (все числа даны без какого-либо округления). Читатели возмутились, что сумма приведённых чисел не равна 100. Оказалось, что некоторые числа из первых трёх — это проценты не от количества зарегистрированных участников, а от числа явившихся на олимпиаду. Процент неявок сосчитан от числа зарегистрированных участников; все явившиеся были зарегистрированы. Восстановите, какие проценты победителей, призёров и участников должны быть от числа зарегистрированных участников.

2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$ и квадрат $ABCD$. Оказалось, что A лежит на оси OX, C — на OY, а B — на параболе (точка B не совпадает с началом координат). Найдите координаты B.

3. В Северной Лимонии $n > 4$ городов, некоторые города соединены бесплатными дорогами (каждая дорога соединяет два города, каждые два города соединены не более чем одной дорогой). Частная компания «Хватьавтодор» хочет купить и сделать платной $n - 1$ дорогу так, чтобы от любого города до любого другого можно было проехать по платным дорогам. Но выяснилось, что при любой такой покупке найдутся два города, между которыми нельзя проехать по бесплатным дорогам. Какое наибольшее количество дорог может быть в Северной Лимонии?

4. Натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_5, b_1, b_2, $\ldots$, b_5 таковы, что все дроби $\frac{a_i}{b_i}$ попарно различны и каждая из них меньше $1/5$. Костя хочет прибавить к k числителям по 1 так, чтобы сумма полученных дробей всё ещё была меньше 1. При каком максимальном k Костя заведомо сможет это сделать?

5. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке R, а прямые AD и BC — в точке S. Докажите, что угол ROS тупой.