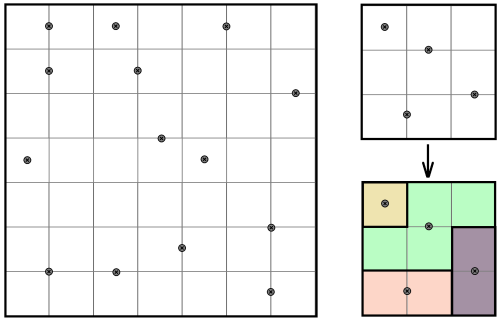
Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
4 класс

1. У папы есть фанерная доска 7×7, в которую вкручены 14 шурупов, как показано на рисунке. Он хочет распилить её на фигуры по границам клеток так, чтобы в каждой фигуре содержался ровно один шуруп, причём если повернуть фигуру вокруг шурупа на пол-оборота, она должна возвратиться в исходное положение. Покажите, как это сделать. (Справа показано решение такой же задачи для доски 3×3.)



2. Кайл Риз, отец Джона, только что отправился в прошлое. Сара — мама Джона. Если вычесть из её возраста сейчас возраст Кайла в прошлом, получится 37 лет; если вычесть из возраста Джона сейчас возраст его мамы в прошлом, получится 25 лет; а если вычесть из возраста Кайла сейчас возраст Сары в прошлом, получится 7 лет. Считая, что путешествие мгновенно, определите, на сколько лет в прошлое отправился Кайл?

3. Сегодня 13 сентября 2026 года, то есть 13.09.2026. Разобьём эту запись на четыре числа: 13, 09, 20 и 26.

Первое и третье числа (13 и 20) различаются на 7, а второе и четвёртое (9 и 26) — на 17. Оба полученных числа (7 и 17) оканчиваются на одну и ту же цифру.

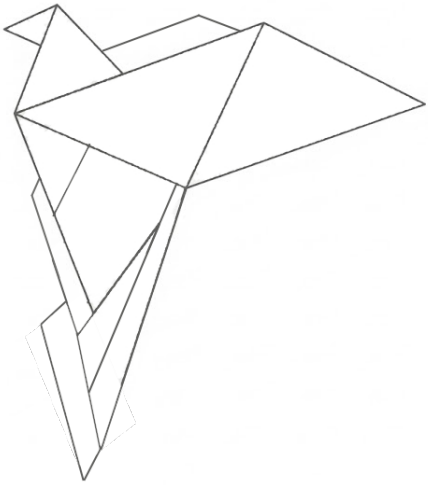
Сколько всего дат в 2026 году обладают таким же свойством: разность первого и третьего числа и разность второго и четвёртого числа оканчиваются на одинаковую цифру?

4. Ленивый Костя читает книжку следующим образом: читает одну страницу, одну пропускает, затем снова читает одну, после неё пропускает

две, затем снова читает одну и так далее, каждый раз пропуская на одну страницу больше, чем в прошлый раз. Оказалось, что он прочитал и первую, и последнюю страницы книги. Могло ли в книге быть ровно 2026 страниц?

5. Вася всегда врёт по средам, четвергам и воскресеньям. Сегодня, придя со школьных уроков, Вася показал в тетрадке голубя (см. рис.) и сказал, что раскрасил все части, из которых состоит голубь, в один из трёх цветов так, что одноцветные части не имели общих сторон.

Вчера же Вася утверждал, что всего способов покрасить этого голубя таким же образом, но в 4 цвета — 5184. Какой сегодня день недели?



Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
5 класс

1. На празднование своего дня рождения Миша пригласил трёх друзей и купил огромный торт, который Миша с друзьями обычно съедали за полчаса (скорость поедания торта у всех одинаковая). Но в этом году через 15 минут после начала трапезы Мише позвонила бабушка, и он был вынужден отвлечься от торта. Остальные как ни в чём не бывало продолжили есть, не останавливаясь, и опомнились только через 10 минут, когда Миша договорил по телефону и вернулся к друзьям. В этот момент ребята остановились и решили оставить весь оставшийся торт Мише. Какое время понадобится Мише, чтобы доесть оставшийся кусок торта?

2. Есть 20 одинаковых на вид монет: ровно 10 лёгких и 10 тяжёлых. Весы позволяют сравнивать по весу только одну монету с одной. Можно ли за 10 взвешиваний гарантированно найти хотя бы одну лёгкую и хотя бы одну тяжёлую монету?

3. Дядька Черномор вывел на берег 533 богатыря и назвал им натуральное число P. После этого он попросил каждого начертить на песке прямоугольник с натуральными сторонами и периметром, равным P. Все прямоугольники оказались различными, причём Черномор заметил, что если бы богатырей было 534, то обязательно нашлись бы два одинаковых прямоугольника. Какое число P мог назвать Черномор? Найдите все варианты ответа и докажите, что других нет. Прямоугольники, отличающиеся друг от друга поворотом, считаются одинаковыми.

4. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга слонов можно расположить на доске 100×100 так, чтобы из левого нижнего угла в правый верхний существовал путь шахматного короля по непобитым слонами клеткам? Слон бьёт все клетки по каждой диагонали, на которой стоит; король может переходить в любую клетку, имеющую с его клеткой общую сторону или вершину. Слон также бьёт клетку, на которой он стоит; стартовая и конечная угловые клетки пути короля также не должны быть побиты слонами.

5. Для каких цифр x можно представить четырёхзначный палиндром $\overline{x00x}$ в виде суммы нескольких трёхзначных палиндромов? Палиндром — это число, которое слева направо и справа налево читается одинаково.

Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
6 класс

1. Братья-хомяки Миша и Гриша пригласили своих друзей-хомяков погрызть семечки. Все хомяки едят семечки с одинаковой скоростью, и запаса хватило бы им ровно на два часа. Но через час после начала один из друзей ушёл, ещё через 15 минут ушёл второй, и далее каждый следующий уходил через 15 минут после предыдущего, пока Миша и Гриша не остались вдвоём. Тогда они догрызли остаток семечек и легли спать. Какое максимальное число друзей могло прийти к ним в гости?

2. Выпускники школы магии сдают три экзамена — алмазный, рубиновый и сапфировый. За каждый из них можно получить целое количество баллов от 0 до 20 включительно. В этом году у каждых двух учеников школы результаты хотя бы одного из трёх экзаменов различались (то есть не было двоих с одинаковым набором баллов). А фасад школы украшен 50 камнями — алмазами, рубинами и сапфирами (менее 20 камней каждого вида). По традиции, выпускник школы получает красный аттестат, если балл за каждый из экзаменов не ниже, чем количество соответствующих камней на фасаде школы. Остальные ученики получают обычный синий аттестат. Накануне выпускного, когда аттестаты были уже напечатаны, с фасада школы упал рубин, и его пришлось срочно заменить сапфиром. Чтобы соблюсти традицию, часть аттестатов пришлось перепечатать. Каково максимальное количество таких аттестатов?

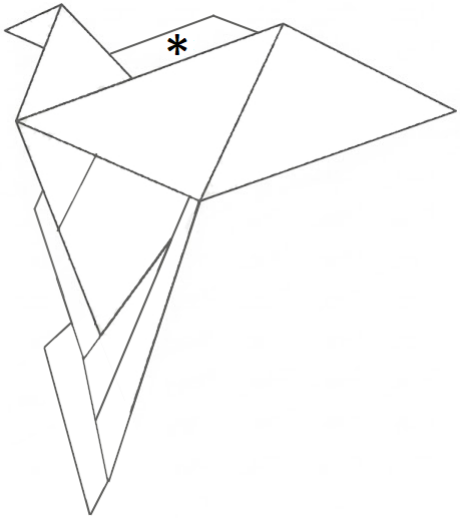
3. 100 умных и воспитанных детей разного роста и с разными фамилиями стоят в ряд в тёмном коридоре. Можно спросить: «Кто выше соседей?» — и те, кто выше своих соседей, назовут свои фамилии (крайний ребёнок назовёт фамилию, если он выше своего соседа). После этого мы можем переставить детей как угодно (назвав фамилии в определённом порядке) и повторить вопрос.
Как нам не более чем за 10 вопросов выяснить:
а) фамилию самого высокого ребёнка;
б) фамилии самого высокого и второго по высоте детей?

4. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расположить на доске 25×25 так, чтобы из левого нижнего угла в правый верхний существовал путь шахматного коня по непобитым ладьями клет-

кам? (Ладья бьёт клетку, на которой она стоит; начальная и конечная угловые клетки пути коня также не должны быть побиты ладьями.)

5. Вася всегда врёт 1-го и 28-го числа каждого месяца, а также по четвергам; в остальные дни он говорит правду. Позавчера Вася нарисовал в тетрадке голубя (см. рис.), а потом разделил четырёхугольник, отмеченный звёздочкой, на несколько фигур. После этого Вася сказал, что может раскрасить все фигуры, из которых состоит получившийся рисунок, в один из трёх цветов так, что одноцветные части не имели общих сторон.

Вчера Вася сообщил, что существует ровно 115 200 способов покрасить его рисунок таким же образом, но в 4 цвета. А сегодня сказал: «Сегодня наступил новый месяц!». Определите сегодняшнее число, месяц и день недели.



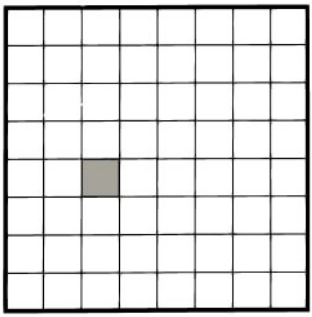
Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
7 класс

1. В каждой клетке прямоугольной таблицы стоят ладьи. Будем считать пару ладей правильной, если одна из них стоит строго выше и правее другой. В какой таблице правильных пар ладей больше — 2025×2026 или 2024×2027?

2. В вершинах пятиугольника расставлены натуральные числа. На каждом ребре этого пятиугольника написано число, равное $a + b + \text{НОК}(a, b)$, где a и b — числа в вершинах, которые соединяет это ребро. Оказалось, что все числа, написанные на рёбрах, равны. Могут ли все числа в вершинах быть различными?

3. Есть 30 одинаковых на вид монет трёх весов, ровно по 10 каждого веса. Весы позволяют сравнивать только одну монету с одной. Как за 30 взвешиваний найти хотя бы одну монету каждого веса?

4. Из квадрата 8 на 8 вырезана клетка. Покажите, как разрезать оставшуюся фигуру на две части одинаковой формы, но разных размеров.



5. На доске записано выражение

$$(1 + 2 + 3)(4 + 5 + 6)(7 + 8 + 9) \ldots (22 + 23 + 24)$$

Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход игрок выбирает один из знаков «+» и заменяет его на «−». Каждый игрок делает ровно 4 хода. Петя выигрывает, если после восьми ходов значение получившегося выражения положительно, а Вася — если отрицательно. Если оно равно 0 — партия заканчивается вничью. Кто из игроков может гарантировать себе победу?

Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
8 класс

1. Вася задумал различные натуральные числа a, b, c, большие 1 и такие, что среди чисел $a-1$, $b-1$, $c-1$, a^2, b^2, c^2 менее пяти различных, а число $8a-5b-3c$ положительно. Докажите, что оно составное.

2. В каждой клетке доски 8×8 провели диагональ. Распутье — это общая вершина четырёх клеток, из которой выходит ровно три диагонали. Какое наибольшее число распутий могло образоваться?

3. Положительное число x таково, что $\{x^2+x\}=\frac{1}{3^6}$. Может ли x быть рациональным?

4. Дана трапеция $ABCD$ (AD и BC параллельны). Точки P, Q на отрезке AD таковы, что $AQ-QD=DP-PA=BC$. Докажите, что если $PB=PD$, то $CQ=AQ$.

5. В клубе 100 джентльменов. Распад клуба происходит следующим образом: часть джентльменов покидает клуб и основывает новый в другом месте. Затем то же происходит с одним из двух получившихся клубов и так далее, пока каждый джентльмен не окажется предоставлен самому себе. Сколькими способами может произойти распад клуба?

Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
9 класс

1. В школе учатся 533 ученика. Каждый из мальчиков посчитал величину: количество мальчиков, с которыми он дружит, минус количество девочек, с которыми он дружит. Каждая девочка посчитала величину: количество мальчиков, с которыми она не дружит, минус количество девочек, с которыми она не дружит. Могла ли сумма всех полученных результатов равняться 999?

2. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ладей можно расположить на доске 100×100 так, чтобы из левого нижнего угла в правый верхний существовал путь шахматного коня по непобитым ладьями клеткам? (Ладья бьёт клетку, на которой она стоит; стартовая и конечная угловые клетки пути коня также не должны быть побиты ладьями.)

3. Найдите все такие тройки вещественных чисел (a, b, c), что для любого вещественного числа $t \neq -a$ квадратный трёхчлен $(a+t)x^2+(b+t)x+(c+t)$ не имеет корней.

4. Андрей выписал на доску несколько (не менее трёх) последовательных натуральных чисел. Некоторые числа он написал красным маркером, а остальные — синим. Оказалось, что НОК красных чисел в 70 раз больше НОК синих чисел. Докажите, что разность каких-то двух разноцветных чисел является натуральной степенью тройки.

5. Дан остроугольный треугольник ABC ($AB < BC$) с описанной окружностью Ω. Точка M — середина стороны AC. Прямая BM вторично пересекает Ω в точке P. Касательная к Ω в точке P пересекает прямую AC в точке Q. Окружность ω, описанная около треугольника PQM, вторично пересекает Ω в точке K. Оказалось, что $BC = PQ$. Докажите, что $KB = KC$.

Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
10 класс

1. Натуральное число n^n имеет ровно 65 делителей (включая 1 и само число). Чему может быть равно n?

2. Окружность касается сторон угла в точках A и B. Расстояние от лежащей на окружности точки C до прямой AB равно 12. Найдите сумму расстояний от точки C до сторон угла, если известно, что одно из этих расстояний на 7 больше другого.

3. Существуют ли вещественные числа a, b, c, такие что при любом вещественном t уравнение $x^3 + (a+t)x^2 + (b+t)x + (c-t)$ имело бы три вещественных корня?

4. На турнир по волейболу приехало 50 команд. Каждые две команды должны сыграть между собой не более одного раза. Ничьих в волейболе нет. По правилам турнира команда, в пятый раз проигравшая, выбывает. Команда, сыгравшая в этом турнире хотя бы 20 матчей, награждается медалью. Найдите наибольшее количество команд, награждённых такими медалями (они могут выбыть из турнира).

5. На координатной плоскости отмечено несколько точек с целыми координатами. Оказалось, что все расстояния между ними иррациональны. Обязательно ли можно добавить ещё одну точку с целыми координатами так, чтобы все расстояния между отмеченными точками по-прежнему были иррациональными?

Олимпиада
Юношеской математической школы
Первый отборочный тур
13 сентября 2026 года
11 класс

1. В треугольной пирамиде $ABCD$ точки E и F — середины BC и CD соответственно. Оказалось, что $AE \perp BD$. Докажите, что AF не перпендикулярно BD.

2. В клубе 100 джентльменов, четверо из которых — Алекс, Боб, Чарльз и Дейл. Распад клуба происходит следующим образом: часть джентльменов покидает клуб и основывает новый в другом месте. Затем то же происходит с одним из двух получившихся клубов и так далее, пока каждый джентльмен не окажется предоставлен самому себе. Все полные последовательности таких разделений, приводящие к 100 одночленным клубам, считаются равновероятными. С какой вероятностью наступит момент, когда Алекс и Боб окажутся вместе в одном клубе, а Чарльз и Дейл — тоже вместе, но в другом?

3. Андрей выписал на доску несколько (не менее трёх) последовательных натуральных чисел. Некоторые числа он написал красным маркером, а остальные — синим. Оказалось, что НОК красных чисел в 70 раз больше НОК синих чисел. Докажите, что разность каких-то двух разноцветных чисел является натуральной степенью тройки.

4. На координатной плоскости отмечено несколько точек с целыми координатами. Оказалось, что все расстояния между ними иррациональны. Обязательно ли можно добавить ещё одну точку с целыми координатами так, чтобы все расстояния между отмеченными точками по-прежнему были иррациональными?

5. Непрерывная функция f определена при всех x и удовлетворяет соотношению $f(f(x)) = f(x) + 3x$. Может ли оказаться, что $f(4) = 3$?